第 36 講　相加平均と相乗平均

36　次の各問いに答えよ．

(1)　x，y を正の実数とする．$(x+4y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}\right)$ の最小値を求めよ．

(2)　$x>1$ とするとき，$\dfrac{x^2+1}{x-1}$ の最小値を求めよ．

(3)　$x>-2$ とするとき，$\dfrac{x+2}{x^2+4x+8}$ の最大値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　相加平均と相乗平均

36　$x>0$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2+4x+12}$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{5}{44}$ ($x=4$ のとき)　㋑ $\dfrac{2}{17}$ ($x=1$ のとき)　㋒ $\dfrac{1}{8}$ ($x=2$ のとき)

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　相加平均と相乗平均

36　次の各問いに答えよ．

(1)　x，y を正の実数とする．$(x+4y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}\right)$ の最小値を求めよ．

(2)　$x>1$ とするとき，$\dfrac{x^2+1}{x-1}$ の最小値を求めよ．

(3)　$x>-2$ とするとき，$\dfrac{x+2}{x^2+4x+8}$ の最大値を求めよ．

【答】 (1) 最小値 49 $\left(\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}\right.$ のとき) (2) 最小値 $2+2\sqrt{2}$ ($x=1+\sqrt{2}$ のとき)

(3) 最大値 $\dfrac{1}{4}$ ($x=0$ のとき)

【解答】

(1)　$(x+4y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}\right)=\dfrac{9x}{y}+\dfrac{4y}{x}+37$ である．

ここで，$x>0$，$y>0$ より $\dfrac{9x}{y}>0$，$\dfrac{4y}{x}>0$ であるので

$$\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{9x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}=12$$

等号は $\dfrac{9x}{y}=\dfrac{4y}{x}$ つまり $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$ のとき成立する．

よって $\dfrac{9x}{y}+\dfrac{4y}{x}+37\geqq 49$ より，求める最小値は **49** $\left(\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}\right.$ のとき)

(2)　$\dfrac{x^2+1}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}+2$ である．

ここで，$x>1$ より $x-1>0$，$\dfrac{2}{x-1}>0$ であるので

$$x-1+\frac{2}{x-1}\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{2}{x-1}}\geqq 2\sqrt{2}$$

等号は $x-1=\dfrac{2}{x-1}$ つまり $x=1+\sqrt{2}$ のとき成立する．

よって $x-1+\dfrac{2}{x-1}+2\geqq 2+2\sqrt{2}$ より，求める最小値は $\mathbf{2+2\sqrt{2}}$ ($x=1+\sqrt{2}$ のとき)

(3)　$x+2>0$ より

$$\frac{x+2}{x^2+4x+8}=\frac{1}{x+2+\dfrac{4}{x+2}}$$

と変形できる．

このとき $x+2>0$，$\dfrac{4}{x+2}>0$ であるので

$$x+2+\frac{4}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{4}{x+2}}=4$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

等号は $x+2=\dfrac{4}{x+2}$ つまり $x=0$ のとき成立する.

よって

$$\frac{1}{x+2+\dfrac{4}{x+2}}\leqq\frac{1}{4}$$

より，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$（$x=0$ のとき）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第36講　相加平均と相乗平均

36　$x>0$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2+4x+12}$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{5}{44}$ ($x=4$ のとき)　㋑ $\dfrac{2}{17}$ ($x=1$ のとき)　㋒ $\dfrac{1}{8}$ ($x=2$ のとき)

【答】 ㋒

【解答】

$x>0$ より $x+1\neq 0$ であるので

$$\frac{x+1}{x^2+4x+12}=\frac{1}{\dfrac{x^2+4x+12}{x+1}}$$

と変形でき，また $x^2+4x+12=(x+1)(x+3)+9$ より

$$\frac{x+1}{x^2+4x+12}=\frac{1}{\dfrac{x^2+4x+12}{x+1}}=\frac{1}{x+3+\dfrac{9}{x+1}}$$

と変形できる．

ここで，$x>0$ より，$x+1>0$，$\dfrac{9}{x+1}>0$ であるので

$$x+1+\frac{9}{x+1}\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}=6$$

が成立する．等号は

$x+1=\dfrac{9}{x+1}$ つまり $x=2$ のとき成立する．

よって $x+1+\dfrac{9}{x+1}\geqq 6$ より $x+3+\dfrac{9}{x+1}\geqq 8$ したがって

$$\frac{1}{x+3+\dfrac{9}{x+1}}\leqq\frac{1}{8}$$

ゆえに求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$ ($x=2$ のとき)

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。